

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования,
информационных и обслуживающих технологий

Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Института физико-
математического образования,
информационных и обслуживающих
технологий

 Е.А. Журавлева
«25» февраля 2026 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Вариационное исчисление

По направлению подготовки	01.03.01 Математика
Профиль подготовки	Математические и цифровые технологии в
образовании	
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная
Курс	4 курс

Луганск, 2026

Рабочая программа учебной дисциплины является частью основной профессиональной образовательной программы высшего образования для подготовки бакалавров по направлению подготовки 01.03.01 Математика и профилю «Математические и цифровые технологии в образовании» очной формы обучения.

Рабочая программа учебной дисциплины разработана в соответствии с ФГОС ВО – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018 № 8 (с изменениями и дополнениями) и Профессиональных стандартов, утвержденными Приказами Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н (с изменениями и дополнениями); от 22 сентября 2021 г. № 652н; от 20 июля 2022 г. № 425н.

СОСТАВИТЕЛЬ:

доцент кафедры фундаментальной математики ФБГОУ ВО «ЛГПУ», канд. пед. наук, доцент Давыскиба Оксана Викторовна.

Утверждена на заседании кафедры фундаментальной математики

Протокол от «17» декабря 2025 г. № 6

Заведующий кафедрой

фундаментальной математики



С.В. Темникова

Одобрена на заседании учебно-методической комиссии Института физико-математического образования, информационных и обслуживающих технологий
Протокол от «14» января 2026 г. № 6

Председатель учебно-методической комиссии

Института физико-математического образования,
информационных и обслуживающих технологий



О.В. Давыскиба

СОГЛАСОВАНО:

Директор Департамента образования



В.В. Савенков

Структура и содержание учебной дисциплины

1. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины «Вариационное исчисление» являются:

- формирование у студентов знаний, умений и навыков, необходимых для приобретения теоретических знаний основ вариационного исчисления;
- освоение методов решения вариационных задач и практических навыков по использованию этих методов в своей профессиональной деятельности.

Задачами освоения учебной дисциплины «Вариационное исчисление» являются:

- формирование у студентов представление об основных понятиях и принципах вариационного исчисления;
- обучение студентов методам решения вариационных задач;
- привитие способности строить математические модели социальных, экономических, физических процессов и явлений, делать выводы из полученных математических результатов;
- приобретение навыков самостоятельной работы с учебной и научной литературой.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП

Учебная дисциплина «Вариационное исчисление» входит в часть, формируемую участниками образовательных отношений, учебного плана дисциплин подготовки студентов по направлению 01.03.01 Математика, профиль подготовки Математические и цифровые технологии в образовании. Индекс дисциплины Б1.В.11.

Необходимыми условиями для освоения учебной дисциплины являются: **знания** теоремы существования и единственности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений; определение, основные понятия функционального анализа, **умения** применять способы решения дифференциальных уравнений, интегрирования и дифференцирования, **навыки** интегрирования, дифференцирования, решения дифференциальных уравнений.

Содержание дисциплины является логическим продолжением содержания дисциплин «Алгебра», «Математический анализ», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальные и интегральные уравнения» и служит основой для дальнейшего освоения дисциплин «Теория функций комплексного переменного».

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения	Результаты обучения по дисциплине
Профессиональные		

ПК-4 Способен разрабатывать и применять современные технологии на основе фундаментальных математических теорий, концепций и методов	ПК-4.1. Понимает значение фундаментальных математических теорий, концепций и методов для решения прикладных задач, способен использовать их при разработке современных цифровых технологий	Знает канонический вид уравнений Эйлера, слабый экстремум, условие Якоби, сильный экстремум, инвариантный интеграл Гильберта, приближенные методы решения вариационных задач; Умеет пользоваться перечисленными понятиями для анализа разных ситуаций, проводить доказательства (выводить формулы) в несложных ситуациях; Владет навыками материалом дисциплины на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе научно-исследовательской деятельности и требующие углублённых
	ПК-4.2 Способен планировать и осуществлять деятельность по разработке и применению современных цифровых технологий на основе отбора и использования перспективных направлений исследований в области фундаментальной и прикладной математики	

4. Структура и содержание учебной дисциплины

4.1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем часов (зач. ед.)	
	Очная форма	Очно-заочная форма
Общая учебная нагрузка (всего)	108 (3,0 зач. ед)	—
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего часов) в том числе:	36	—
Лекции	18	—
Семинарские занятия	—	—
Практические занятия	18	—
Лабораторные работы	—	—
Контрольные работы	—	—
Курсовая работа / курсовой проект	—	—
Другие формы организации учебного процесса	—	—
Самостоятельная работа студента (всего часов)	68	—
Форма аттестации	4 Зачет	-

4.2. Содержание разделов учебной дисциплины

Тема 1. Основные понятия вариационного исчисления

Предмет, содержание и особенности курса. Структура курса, его значение и место в подготовке инженера. Некоторые классические задачи вариационного исчисления. Функционалы в линейных нормированных пространствах. Основные определения. Необходимое условие экстремума функционала в линейном нормированном пространстве. Основная лемма вариационного исчисления.

Тема 2. Простейшая задача вариационного исчисления

Необходимое условие экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Уравнения Эйлера. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера в квадратурах. Решение задачи Бернулли о брахистохроне. Инвариантный интеграл Гильберта.

Тема 3. Вариационные задачи с фиксированными границами

Постановка вариационных задач с фиксированными границами. Необходимое условие экстремума функционалов, зависящих от нескольких функций и производных высших порядков. Уравнение Эйлера-Пуассона. Уравнение Остроградского в задаче поиска экстремалей функционалов от функций многих переменных.

Тема 4. Вариационные задачи с подвижными границами

Постановка вариационных задач с подвижными границами. Необходимое условие экстремума в задачах с подвижными границами. Условие трансверсальности. Экстремали с угловыми точками. Задачи об отражении и преломлении экстремалей. Условия отражения и преломления экстремалей.

Тема 5. Вариационные задачи на условный экстремум

Постановка вариационных задач на условный экстремум. Необходимое условие экстремума в задачах с конечными и дифференциальными связями. Изопериметрическая задача.

Тема 6. Задача Больца

Постановка задачи Больца. Необходимое условие экстремума в элементарной задаче Больца.

Тема 7. Достаточные условия экстремума функционала

Вторая вариация функционала. Достаточные условия сильного и слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Условия Якоби, Вейерштрасса и Лежандра.

Тема 8. Приложения вариационных методов

Принцип Гамильтона. Аэродинамическая задача Ньютона. Вариационные принципы механики.

Тема 9. Прямые методы вариационного исчисления

Вариационное уравнение. Построение функционала по вариационному уравнению. Метод Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов.

4.3. Лекции

№ п/п	Название темы	Объем часов	
		Очная форма	Очно-заочная форма
7 семестр			
1	Тема 1. Основные понятия вариационного исчисления	2	—
2	Тема 2. Простейшая задача вариационного исчисления	2	—
3	Тема 3. Вариационные задачи с фиксированными границами	2	—
4	Тема 4. Вариационные задачи с подвижными границами	2	—
5	Тема 5. Вариационные задачи на условный экстремум	2	—
6	Тема 6. Задача Больца	2	—
7	Тема 7. Достаточные условия экстремума функционала	2	—
8	Тема 8. Приложения вариационных методов	2	—
9	Тема 9. Прямые методы вариационного исчисления	2	—
Итого:		18	—

4.4. Практические / семинарские занятия

№ п/п	Название темы	Объем часов	
		Очная форма	Очно-заочная форма
7 семестр			
1	Тема 1. Основные понятия вариационного исчисления	2	—
2	Тема 2. Простейшая задача вариационного исчисления	2	—
3	Тема 3. Вариационные задачи с фиксированными границами	2	—
4	Тема 4. Вариационные задачи с подвижными границами	2	—
5	Тема 5. Вариационные задачи на условный экстремум	2	—
6	Тема 6. Задача Больца	2	—
7	Тема 7. Достаточные условия экстремума функционала	2	—

8	Тема 8. Приложения вариационных методов	2	–
9	Тема 9. Прямые методы вариационного исчисления	2	–
Итого:		18	–

4.5. Лабораторные работы

Учебным планом не предусмотрены.

4.6. Самостоятельная работа студентов

№ п/п	Название раздела / темы	Вид самостоятельной работы	Объем часов	
			Очная форма	Очно- заочная форма
7 семестр				
1	Тема 1. Основные понятия вариационного исчисления	Самостоятельная проработка теоретического материала. Выполнение домашнего задания.	6	—
2	Тема 2. Простейшая задача вариационного исчисления	Самостоятельная проработка теоретического материала. Выполнение домашнего задания.	6	—
3	Тема 3. Вариационные задачи с фиксированными границами	Самостоятельная проработка теоретического материала. Выполнение домашнего задания.	8	—
4	Тема 4. Вариационные задачи с подвижными границами	Самостоятельная проработка теоретического материала. Выполнение домашнего задания.	8	—
5	Тема 5. Вариационные задачи на условный экстремум	Самостоятельная проработка теоретического материала. Выполнение	8	—

		домашнего задания.		
6	Тема 6. Задача Больца	Самостоятельная проработка теоретического материала. Выполнение домашнего задания.	8	—
7	Тема 7. Достаточные условия экстремума функционала	Самостоятельная проработка теоретического материала. Выполнение домашнего задания.	8	—
8	Тема 8. Приложения вариационных методов	Самостоятельная проработка теоретического материала. Выполнение домашнего задания.	8	—
9	Тема 9. Прямые методы вариационного исчисления	Самостоятельная проработка теоретического материала. Выполнение домашнего задания.	8	—
Итого:			68	—
	Зачет	Подготовка к зачету	4	—

4.7. Курсовые работы.

Не предусмотрены учебным планом.

5. Методическое обеспечение, образовательные технологии

Преподавание дисциплины ведется с применением следующих видов образовательных технологий:

- *Классические (традиционные) технологии:* проведение лекций и практических занятий
- *Использование электронных образовательных ресурсов* при подготовке к лекциям и практическим занятиям.
- *Проблемная лекция.* Начинается с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. Лекция строится таким образом, что деятельность студента по её усвоению приближается к исследовательской. Обязателен диалог преподавателя и студентов.

– *Лекция – консультация*, при которой до 40-50% времени отводится на вопросы студентов. Лекция – консультация наиболее эффективна, если является завершающей лекцией семестра.

– *Элементы алгоритмической технологии*: использование готовых алгоритмов на этапе знакомства с методами решения уравнений определенного типа.

Индивидуальные домашние задания, творческие задания, самостоятельные и контрольные работы выполняются студентами в письменной форме.

6. Формы контроля освоения учебной дисциплины

Текущая аттестация студентов производится в дискретные временные интервалы лектором и преподавателем, ведущим практические занятия по дисциплине в следующих формах:

- письменные домашние задания;
- контрольные работы;
- выполнение практических заданий.

Промежуточный контроль по результатам освоения дисциплины проходит в форме зачета (включает в себя ответ на теоретические вопросы и решение задач).

Система оценивания учебных достижений студентов, оценочные средства представлены в фонде оценочных средств к рабочей программе учебной дисциплины (приложении).

7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Бренерман, М.Х. Вариационное исчисление : учебное пособие / М.Х. Бренерман, В.А. Жихарев– Казань : Издательство КНИТУ, 2017. – 148 с. – ISBN 978-5-7882-2198-4. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/79275.html> (дата обращения: 07.05.2023).

2. Лебедев, К. А. Вариационное исчисление : учебное пособие / К. А. Лебедев. – Вологда : Инфра-Инженерия, 2023. – 220 с. – ISBN 978-5-9729-1224-7. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/347501> (дата обращения: 08.05.2023).

3. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина. – 2-е изд. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 432 с. – ISBN 5-9221-0628-7. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/59405> (дата обращения: 08.04.2023).

б) дополнительная литература:

1. Богомолова, Е. В. Интегральные уравнения и вариационное исчисление : учебное пособие / Е. В. Богомолова. – Дубна : Государственный

университет «Дубна», 2023. – 136 с. – ISBN 978-5-89847-689-2. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/369323> (дата обращения: 07.05.2023).

2. Моклячук, М. П. Вариационное исчисление. Экстремальные задачи : учебник / М. П. Моклячук. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 428 с. — ISBN 978-5-4344-0695-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/91913.html> (дата обращения: 07.05.2023).

в) Интернет-ресурсы:

1. Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com>

2. Электронно-библиотечная система «IPR SMART» : [сайт]. — Режим доступа: <https://www.iprbookshop.ru>.

3. Федеральный портал российского образования : [сайт]. — Режим доступа: www.edu.ru.

4. Научная электронная библиотека : [сайт]. — Режим доступа: www.elibrary.ru.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционные занятия: комплект электронных презентаций/слайдов, аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук).

Практические занятия: компьютерный класс, презентационная техника (проектор, экран, компьютер/ноутбук), пакеты ПО общего назначения (текстовые редакторы, графические редакторы).

Прочее: рабочее место преподавателя, оснащенное компьютером с доступом в Интернет, рабочие места студентов, оснащенные компьютерами с доступом в Интернет, предназначенные для работы в электронной образовательной среде, и т.п.

9. Лист дополнений и изменений

[illegible]